

Pensando la geometría a través del Geoplano

Tal vez hayas escuchado que la Geometría Euclidiana es la “Geometría de la Regla y el Compás”, esto es porque que sus principales objetos de estudio son las rectas, los ángulos, las circunferencias y cómo realizar construcciones, transportarlas y compararlas usando dichos instrumentos.

¿Qué pasa con la Geometría si cambiamos los instrumentos con los cuales trabajamos? Vamos a averiguarlo proponiendo el uso del Geoplano, de diferentes *dimensiones*: 3x3, 5x5, 6x6, 10x10 hasta (haciendo uso de un poco de imaginación) $\infty \times \infty$. Vale aclarar que cuando nos refiramos a este último caso lo llamaremos Cuadrícula en lugar de Geoplano.

El objetivo prioritario del uso del Geoplano está en descubrir propiedades geométricas mediante la manipulación directa y la construcción de figuras con los clavos y las gomas.

El Geoplano sirve de laboratorio de ensayo para elaborar conjeturas propias y comprobarlas, propiciando así en el razonamiento lógico y deductivo imprescindible para poder comprender las demostraciones formales.

La estructura del Geoplano es bastante simple: el Geoplano es un “micromundo” compuesto de una cantidad finita de puntos dispuestos de una manera particular, que usamos para determinar segmentos y polígonos, con la posibilidad inmediata de medir las longitudes de los segmentos y el perímetro y el área de los polígonos contruidos.

Esta configuración nos permite estudiar algunas propiedades geométricas muchas veces a partir de sus limitaciones. La comparación de las propiedades específicas del geoplano con el universo más amplio de la geometría plana que conocemos, permite confrontar ideas, generalizar y entender algunas conexiones intramatemáticas, por ejemplo, entre álgebra y geometría.

Martha Ferrero, María Teresa Juan y Virginia Montoro

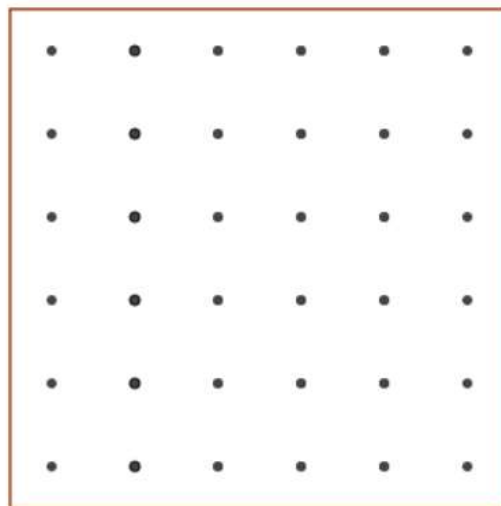
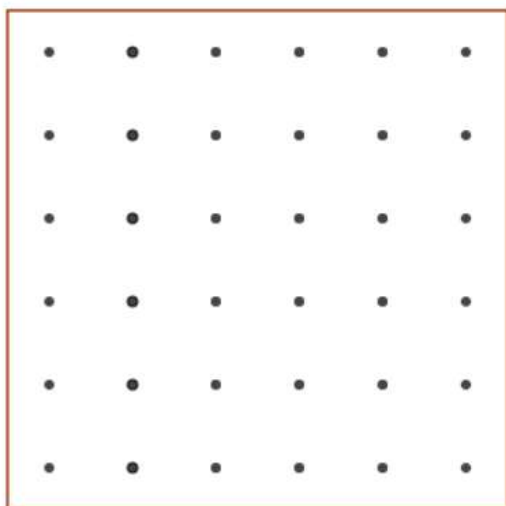
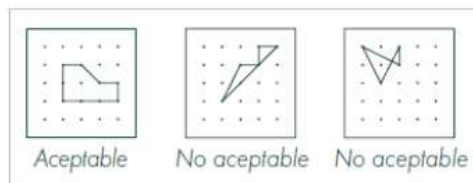
Profesoras Área Álgebra y Geometría

Departamento de Matemática

Centro Regional Universitario Bariloche

Universidad Nacional del Comahue

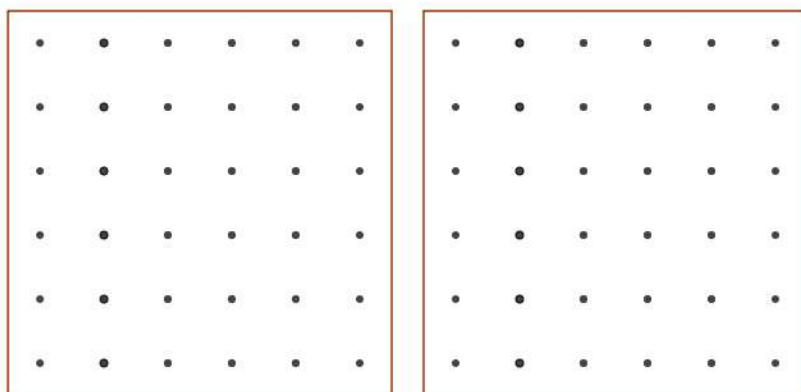
Actividad 1 (Libre): Jugar acomodando las gomas elásticas de modo de formar polígonos, con la condición de que la goma no se cruce a sí misma.



Actividad 2: Proponer distintas formas de clasificar las figuras realizadas¹ (usando y sin usar mediciones)

Polígono	Cantidad de lados	Convexidad		
1				
2				
3				
4				
5				
6				

1



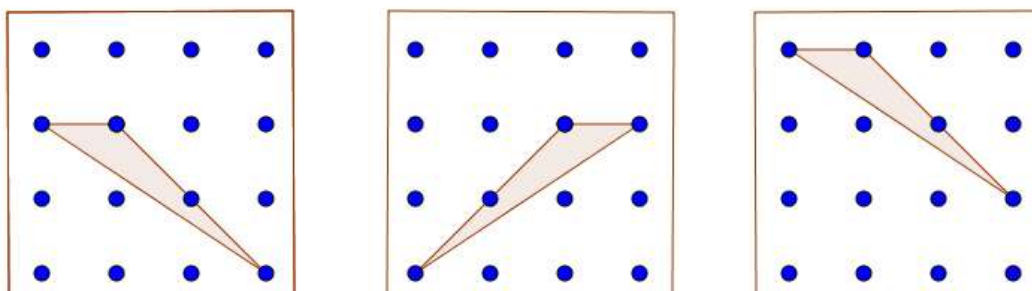
Actividad 3: Recordando la clasificación de los triángulos según sus lados y según sus ángulos, construir distintos tipos de triángulos.

Triángulo	Según sus lados	Según sus ángulos
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

a) Observar la posibilidad de que aparezcan triángulos “repetidos” o sea que aunque estén en distinta posición tienen la misma forma y tamaño.

Decimos que dos figuras con vértices en el geoplano son *congruentes* cuando puede establecerse una función biyectiva (correspondencia uno a uno), llamada Transformación Rígida, que preserve la forma y el tamaño, entre los vértices de una figura y de la otra.

(Llamamos vértices de la figura a los puntos extremos de los segmentos que constituyen los lados de la figura. En el Geoplano puede suceder que haya puntos de la cuadrícula que pertenecen a la figura y no son vértices de la misma).

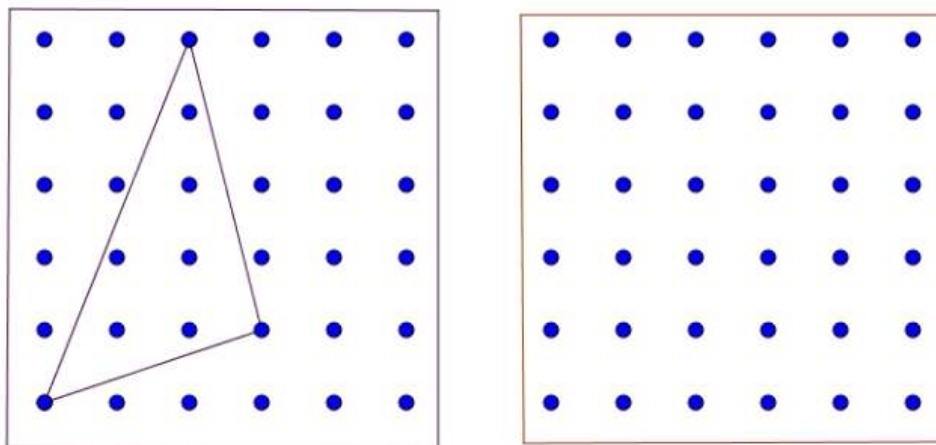


b) Los triángulos congruentes deben tener la misma forma y tamaño, aunque pueden tener diferente *orientación*. Verificar con ayuda de un ESPEJO estas diferencias de orientación en los triángulos realizados.

Tenemos entonces que FIGURAS CONGRUENTES pueden tener igual o distinta orientación.

c) ¿Alguno de los triángulos realizados es equilátero?

Actividad 4: A partir del triángulo dado, hallar TODOS los congruentes con él en el geoplano de 6x6 (6 clavos por lado).



*¿Habías notado que por cada triángulo congruente con la misma orientación que el original existe otro también congruente con distinta orientación?

*Notemos también que todos los triángulos obtenidos son congruentes entre sí. La relación de congruencia entre figuras tiene las propiedades REFLEXIVA, SIMÉTRICA y TRANSITIVA, en términos matemáticos decimos que la relación de congruencia es una RELACIÓN DE EQUIVALENCIA.

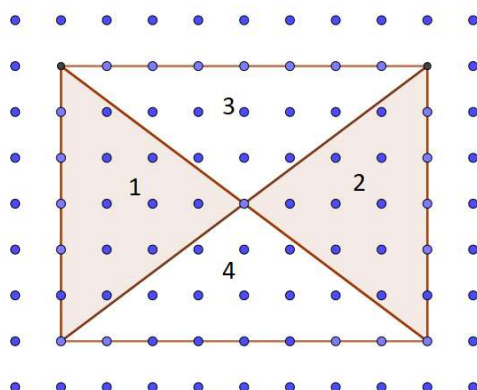
*Identificar traslaciones, rotaciones, simetrías axiales y reflexiones deslizantes entre las transformaciones rígidas que llevan el triángulo original a cada una de las imágenes halladas.

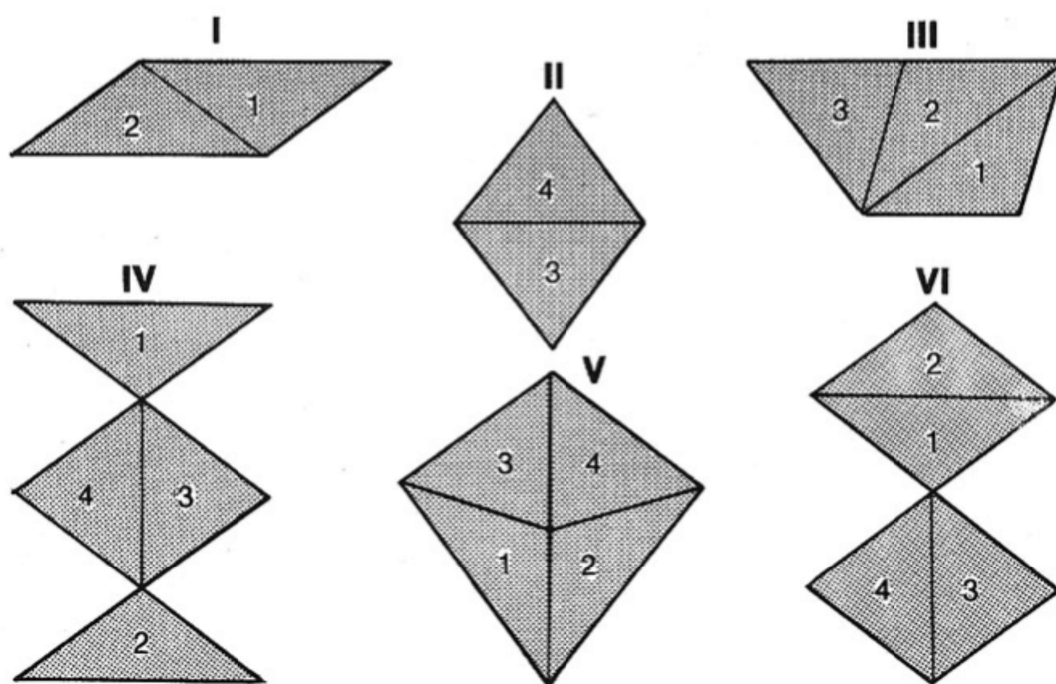
*¿Cuántas posibilidades de triángulos congruentes a la inicial habría si el Geoplano fuera de 7x7?

Si tenemos dos figuras A y B congruentes (es decir, existe una Transformación Rígida f tal que $f(A)=B$) podemos anotar $A \equiv B$.

Actividad 5: En el geoplano de 4x4 hallar todos los triángulos isósceles distintos que pueden obtenerse (es decir dos triángulos isósceles congruentes se cuentan una sola vez)

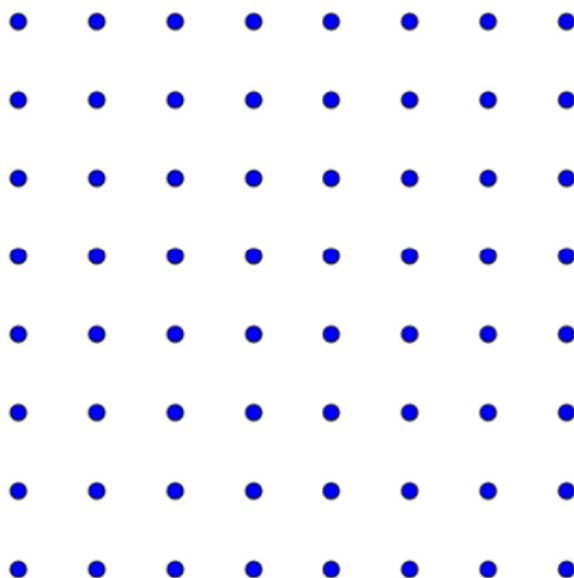
Actividad 6: El rectángulo de la figura se ha dividido en 4 triángulos isósceles mediante el trazado de las diagonales. Si se recortan estos triángulos y se disponen como indican los puzzles siguientes, se obtienen distintas figuras. ¿Cuáles de esos puzzles que se muestran pueden construirse en la cuadrícula (geoplano $\infty \times \infty$)?





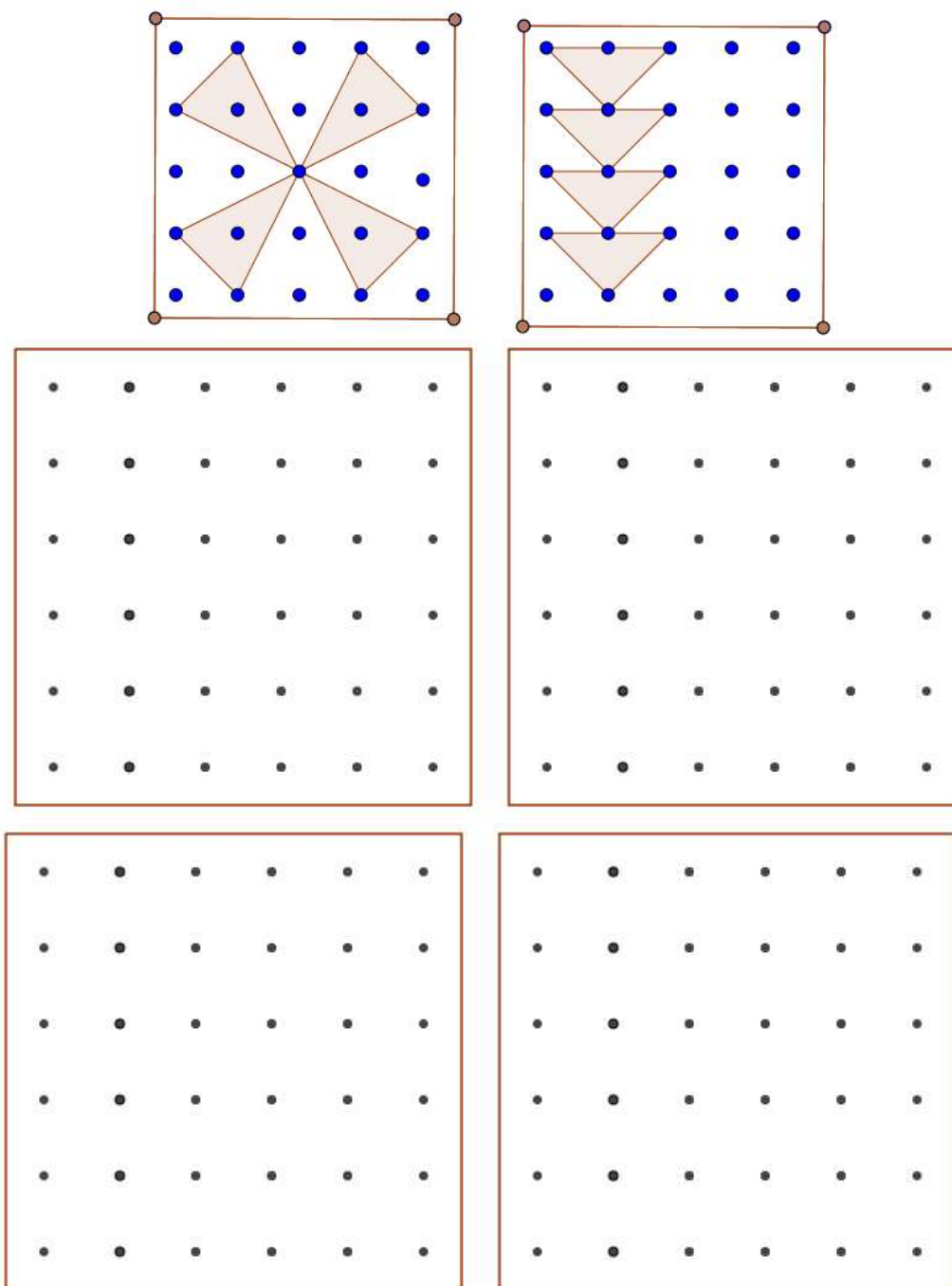
Actividad 7: Jugando con cuadriláteros convexos en un geoplano finito ($n \times n$): Realizar cuadrados, rombos, paralelogramos, trapecios, rectángulos, trapezoides, romboídes.

Actividad 8: en una cuadrícula de 8×8 construir todos los cuadrados que puedas de lado $5u$ (u es la mínima de las distancias entre dos clavos vecinos)



Actividad 9: Verificar que los cuadrados de lados que miden $1u$, $\sqrt{2}u$, $2u$, $\sqrt{5}u$, $\sqrt{8}u$, $3u$, $\sqrt{10}u$, $\sqrt{13}u$, $4u$, $\sqrt{17}u$ tienen una única “posición” posible (salvo traslaciones). ¿Cuáles son los tamaños mínimos de geoplanos requeridos para construir varios cuadrados de lados que miden $5u$, $13u$, $17u$, $25u$? ¿Cuántas “posiciones” distintas tienen los cuadrados de lados que miden $10u$, $39u$, $65u$? Ayudarse con la tabla del Anexo para contestar.

Actividad 10: Realizar diseños con figuras congruentes combinadas a fin de obtener figuras que muestren SIMETRÍAS, ROTACIONES y TRASLACIONES. Las simetrías pueden ser respecto de un punto (SIMETRÍA CENTRAL) o de una recta (SIMETRÍA AXIAL). Por ejemplo:



Actividad 11: Discutir alcances e inconvenientes de trabajar en el geoplano con FIGURAS CONGRUENTES y las TRANSFORMACIONES RÍGIDAS que intervienen para explicitar la congruencia.

Por ejemplo: - Hemos definido congruencia entre polígonos pero no entre segmentos (a cargo del lector) y tampoco congruencia de ángulos (trae algunas complicaciones definir ángulos en el geoplano y por eso no lo hicimos, nos conformamos con una idea intuitiva de esto).

- Una figura con simetría central cuyo centro de simetría no es un punto de la cuadrícula...

Actividad 12: COMPLETAR la demostración del siguiente TEOREMA:

Todo polígono es congruente a sí mismo.

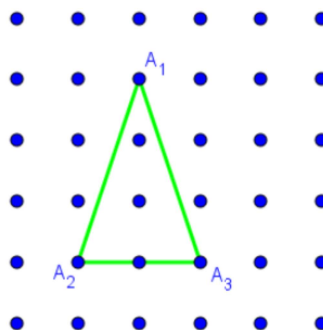
Demostración

Según las definiciones dadas, para mostrar que un polígono $A_1A_2\dots A_n$ es congruente a sí mismo debemos encontrar una correspondencia f uno a uno que transforme los vértices del polígono $A_1A_2\dots A_n$ en vértices del mismo polígono, preservando forma y tamaño. Si proponemos $f(A_1)=\dots, f(A_2)=\dots, \dots, f(A_n)=\dots$, f cumple con las condiciones pedidas y resulta $f(A_1A_2\dots A_n) = A_1A_2\dots A_n$.

La función f que cada vértice lo asigna a sí mismo se conoce como IDENTIDAD y la notación utilizada es Id (por ejemplo, $Id(P)=P$ y también $Id(A_1A_2\dots A_n) = A_1A_2\dots A_n$).

Se dice que una figura tiene SIMETRÍAS si podemos encontrar Transformaciones Rígidas *distintas* de la Identidad que efectúen correspondencias uno a uno entre sus vértices, es decir, una transformación que deja DOBLE a la figura (la figura imagen es la misma que la original) pero los vértices pueden ser intercambiados.

Por ejemplo: Un triángulo isósceles de base A_2A_3 es congruente consigo mismo de dos maneras, una es la identidad (como ya probamos) y la otra es la función T tal que $T(A_1)=A_1, T(A_2)=A_3, T(A_3)=A_2$ donde A_1 es un punto fijo y A_2 y A_3 se intercambian entre sí.



Conviene introducir notación para identificar mejor estas funciones, nombrando a los vértices como números consecutivos en el dominio y a sus imágenes respectivas en el renglón debajo mostrando esta correspondencia. Todo esto lo ponemos entre paréntesis (notación matricial):

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Estas funciones pueden además componerse entre sí, por ejemplo si aplicamos T dos veces, obtenemos Id .

Y ahora tenemos dos modos de ver que esto es cierto: geoméricamente y algebraicamente. En este último caso:

- para hallar la imagen de 1: aplicando T una vez obtenemos 1 y una segunda vez, nuevamente 1;
- para hallar la imagen de 2: aplicando T una vez obtenemos 3 y como $T(3) = 2$, $T \circ T(2) = 2$;
- para hallar la imagen de 3: aplicando T una vez obtenemos 2 y como $T(2) = 3$, $T \circ T(3) = 3$;

Podemos consignar el comportamiento bajo la operación COMPOSICIÓN ($\circ$) de estas “Transformaciones Rígidas que dejan doble a un triángulo isósceles” en la siguiente tabla:

$\circ$	Id	T
Id	Id	T
T	T	Id

Hemos llegado aquí a un ejemplo muy simple de uno de los conceptos más importantes de la matemática: el concepto de GRUPO.

Definición

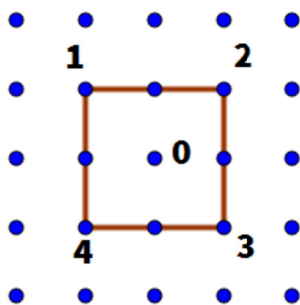
Un conjunto C (no vacío) cualquiera y una operación $*$ entre elementos de C tiene estructura de GRUPO si se verifican las siguientes propiedades

* es asociativa: $(a*b)*c = a*(b*c)$ para todo a, b, c pertenecientes a C

* posee *elemento neutro*: existe $e \in C$ tal que $a*e = e*a = a$, para todo $a \in C$

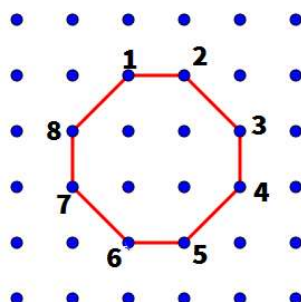
* cada elemento de C tiene un inverso: dado $a \in C$, existe $a' \in C$ tal que $a*a' = a'*a = e$

Actividad 13: a) Describir las SIMETRÍAS de un CUADRADO de vértices 1, 2, 3, 4 (geométrica y algebraicamente) y realizar el cuadro de composición de las “Transformaciones Rígidas que dejan DOBLE un CUADRADO”.



b) Justificar si la función $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ es o no una Transformación Rígida que deja DOBLE al CUADRADO.

Actividad 14: Estudiemos algunas simetrías del octógono con vértices en el geoplano (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)



¿Es cierto que la recta que une los vértices 1 y 5 es eje de simetría de la figura? ¿Por qué?

¿Son congruentes dos a dos los lados del octógono? ¿Y sus ángulos?

Estudiar los cuadriláteros “inscritos” en el octógono formados por los vértices (1, 3, 5, 7) y (2, 4, 6, 8). ¿Son congruentes?

¿Te animás a decir cuántas son las Transformaciones Rígidas que dejan doble a este octógono particular sin enumerarlas? Comparar con el grupo de este octógono (que no es un *polígono regular*²) con el del cuadrado.

Actividades Extras:

- Mirar las simetrías de un rombo.
- Realizar otros diseños de figuras que tengan las mismas simetrías que el rombo (cruz, dos triángulos isósceles enfrentados de punta).
- Buscar figuras que tengan centro de simetría pero no ejes de simetría.
- Juego de comunicación: un equipo realiza una figura en el geoplano y da pistas al otro para que la reproduzca (¿aparecerán las coordenadas cartesianas como recurso?).
- ¿Y los triángulos equiláteros? ¿Tenemos alguna forma de saber si son o no posibles habitantes del geoplano?

Bibliografía:

Coxeter, H.S.M. (1971) Fundamentos de Geometría. Editorial Limusa-Wiley, S.A. México.

Espinosa Pérez, H. García Peña, S. y García Juárez, M. A. (2004) Fichero de actividades didácticas – Matemáticas. Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal de la Secretaría de Educación Pública, México. ISBN 970-18-4428-9. Segunda reimpresión.

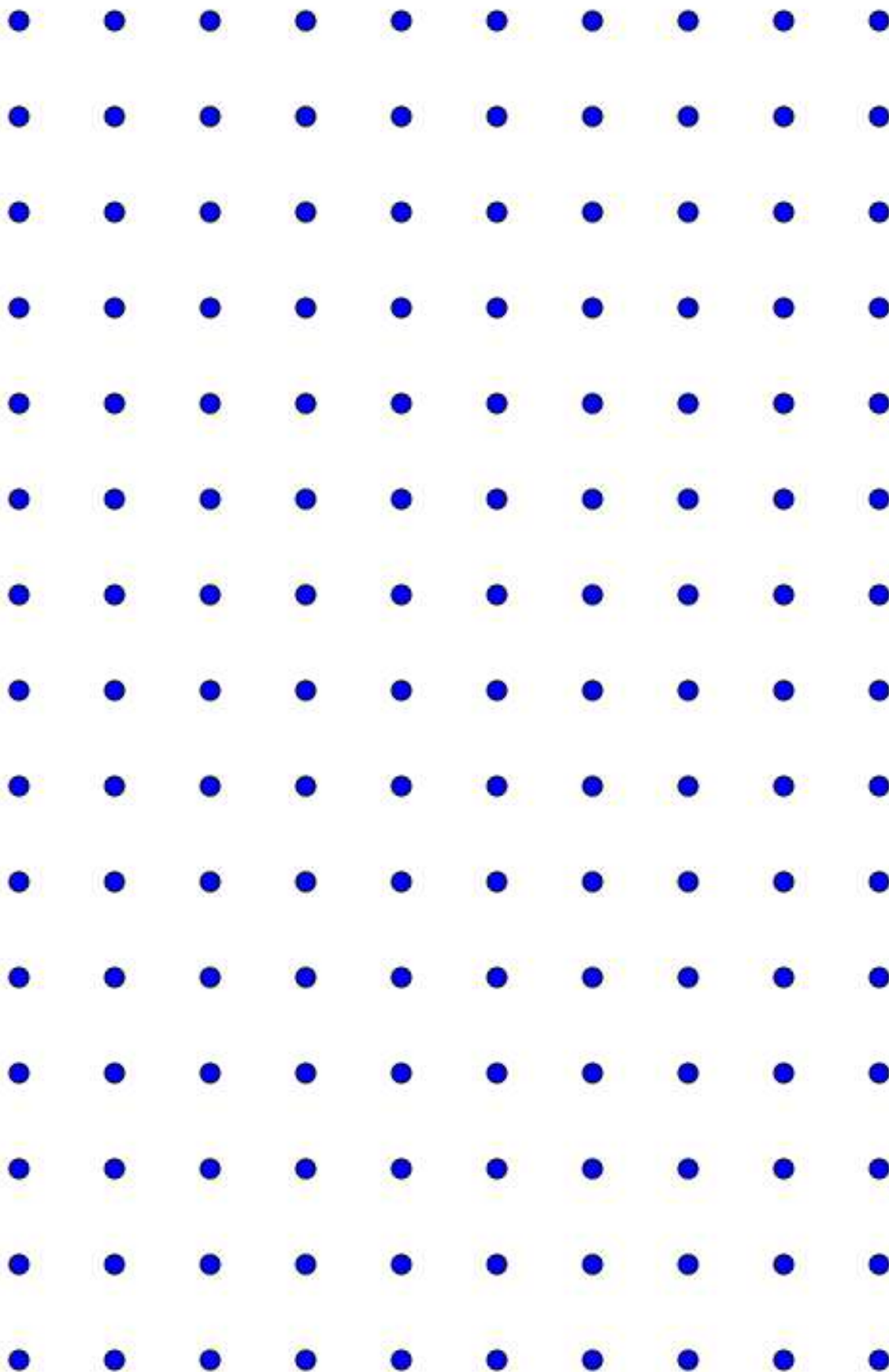
Gutiérrez Rodríguez, A. y Fernández Lajusticia, A. (1985) Actividades con el Geoplano para la EGB Papeles de Enseñanza de la Matemática Universidad de Valencia. ISBN 84-600-3821-1

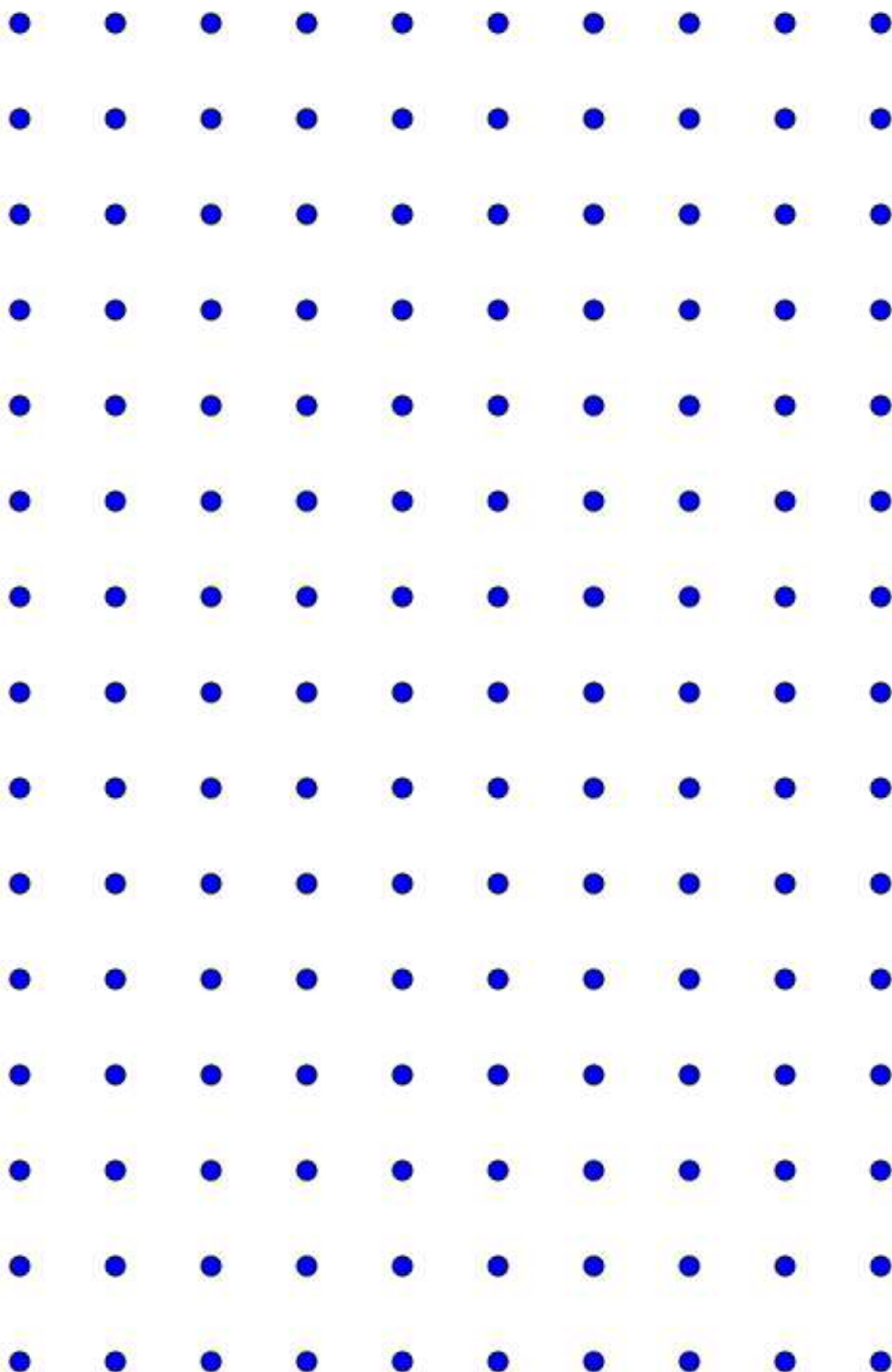
Hilbert y Cohn Vossen (1952) *Geometry and the Imagination*. Chelsea Publishing Company. New York.

Recursos TIC

geoplano virtual freeware: <https://www.mathplayground.com/geoboard.html>

app para iphone: geoboard





ANEXO: Tabla de Primeras Ternas Pitagóricas Primitivas

<http://www.disfrutalasmatematicas.com/numeros/pitagoricas-ternas.html>

(3,4,5)	(5,12,13)	(7,24,25)	(8,15,17)	(9,40,41)
(11,60,61)	(12,35,37)	(13,84,85)	(15,112,113)	(16,63,65)
(17,144,145)	(19,180,181)	(20,21,29)	(20,99,101)	(21,220,221)
(23,264,265)	(24,143,145)	(25,312,313)	(27,364,365)	(28,45,53)
(28,195,197)	(29,420,421)	(31,480,481)	(32,255,257)	(33,56,65)
(33,544,545)	(35,612,613)	(36,77,85)	(36,323,325)	(37,684,685)
(39,80,89)	(39,760,761)	(40,399,401)	(41,840,841)	(43,924,925)
(44,117,125)	(44,483,485)	(48,55,73)	(48,575,577)	(51,140,149)
(52,165,173)	(52,675,677)	(56,783,785)	(57,176,185)	(60,91,109)
(60,221,229)	(60,899,901)	(65,72,97)	(68,285,293)	(69,260,269)
(75,308,317)	(76,357,365)	(84,187,205)	(84,437,445)	(85,132,157)
(87,416,425)	(88,105,137)	(92,525,533)	(93,476,485)	(95,168,193)
(96,247,265)	(100,621,629)	(104,153,185)	(105,208,233)	(105,608,617)
(108,725,733)	(111,680,689)	(115,252,277)	(116,837,845)	(119,120,169)
(120,209,241)	(120,391,409)	(123,836,845)	(124,957,965)	(129,920,929)
(132,475,493)	(133,156,205)	(135,352,377)	(136,273,305)	(140,171,221)
(145,408,433)	(152,345,377)	(155,468,493)	(156,667,685)	(160,231,281)
(161,240,289)	(165,532,557)	(168,425,457)	(168,775,793)	(175,288,337)
(180,299,349)	(184,513,545)	(185,672,697)	(189,340,389)	(195,748,773)
(200,609,641)	(203,396,445)	(204,253,325)	(205,828,853)	(207,224,305)
(215,912,937)	(216,713,745)	(217,456,505)	(220,459,509)	(225,272,353)
(228,325,397)	(231,520,569)	(232,825,857)	(240,551,601)	(248,945,977)
(252,275,373)	(259,660,709)	(260,651,701)	(261,380,461)	(273,736,785)
(276,493,565)	(279,440,521)	(280,351,449)	(280,759,809)	(287,816,865)
(297,304,425)	(300,589,661)	(301,900,949)	(308,435,533)	(315,572,653)